Τοπολογία 17/5/19

Έστω τώρα E ένα διάστημα του $\mathbb{R}$

Θα αποδείξουμε ότι το E είναι συνεκτικό

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι το E δεν είναι συνεκτικό.

Τότε υπάρχουν δύο μη κενά ξένα ανοικτά (και κλειστά) υποσύνολα του E

$E = A \cup B$

Έστω $a \in A$ και $b \in B$

Τότε $a < b$ ή $b < a$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $a < b$.

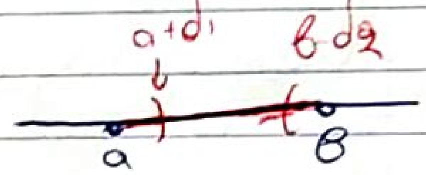
Εφόσον το E είναι διάστημα έχουμε $[a,b] \subseteq E$

Εφόσον το A και B είναι ανοικτά στο E και $a \in A$, $b \in B$

υπάρχουν $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$

ώστε $[a, a+\delta_1) \subseteq A$

$(b-\delta_2, b] \subseteq B$



Σημείωση (Δεν γνωρίζουμε αν το a είναι το αριστερό άκρο του E. Αν ξέραμε ότι δεν εί[ναι] θα μπορούσαμε να γράψουμε $\delta > 0$ και $(a-\delta_1, a+\delta_1) \subseteq$ [...] Ομοίως για το B.)

Θέτουμε $\Gamma = \{t \geq a \; [a,t] \subseteq A\}$

Παρατηρούμε ότι $\Gamma \neq \emptyset$ (και ειδικότερα για κάθε $t \in [a, a+\delta_1)$ έχουμε $t \in \Gamma$)

και το b είναι άνω φράγμα του Γ

(διότι αν υπάρχει $t > b$ με $t \in \Gamma$ τότε $[a,t]$ [...] αν $b \in A$ άτοπο)

Θέτουμε $x = \sup \Gamma$

Εφόσον $a < x \leq b$. Θα ισχύει $x \in E$ άρα $x \in A$

ή $x \in B$

1η περίπτωση $x \in A$

Εφόσον το A είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon > 0$

ώστε $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$.

Εφόσον $[a, x) \subseteq A$ θα έχουμε $[a, x+\varepsilon/2] \subseteq A$

άρα $x + \frac{\varepsilon}{2} \in \Gamma$, άτοπο (διότι $x + \frac{\varepsilon}{2} > x = \sup \Gamma$)

2η περίπτωση $x \in B$

Εφόσον το B είναι ανοικτό στο E υπάρχει $\varepsilon > 0$

ώστε $(x-\varepsilon, x] \subseteq B$. Τότε ο αριθμός $x - \varepsilon$ είναι άνω

φράγμα του Γ άτοπο (διότι $x-\varepsilon < x \leq \sup \Gamma$)

Επομένως αφού έχουμε άτοπο και στις δύο περιπτώσεις το σύνολο E είναι ανεκτικό

Πρόταση Έστω (X, ρ) μ.χ και $(C_i)_{i \in I}$ μία οικογένεια από ανεκτικά υποσύνολα του X

ώστε $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$.

Τότε το σύνολο $\bigcup_{i \in I} C_i$ είναι ανεκτικό.

Απόδ

Έστω $x_0 \in \bigcap_{i \in I} C_i$. Τότε $x_0 \in C_i \ \forall i \in I$

Έστω $f: \bigcup_{i \in I} C_i \to \{0, 1\}$ συνεχής

(και θα δείξουμε ότι η f δεν είναι επί)

Τότε για κάθε $i \in I$ ο περιορισμός $f|_{C_i} : C_i \to \{0,1\}$ είναι συνεχής (ως περιορισμοί συνεχούς συνάρτησης)
κι εφόσον το C_i είναι συνεκτικό, δεν είναι επί.
Άρα εφόσον το $f(x_0) \in \{0,1\}$ ανήκει στην εικόνα της $(f|_{C_i})(C_i)$
Συμπεραίνουμε ότι $(f|_{C_i})(x) = f(x_0)$ $\forall x \in C_i$
δηλ. $f(x) = f(x_0)$ $\forall x \in C_i$

Εφόσον αυτό συμβαίνει $\forall i \in I$ συμπεραίνουμε ότι το $f(x) = f(x_0)$ $\forall x \in \bigcup_{i \in I} C_i$
Συνεπώς η f δεν είναι επί του $\{0,1\}$
Επομένως το $\bigcup_{i \in I} C_i$ είναι συνεκτικό

Πρόταση Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος.
Αν το A είναι συνεκτικό υποσύνολο του X και $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ τότε το B είναι συνεκτικό
(ειδικότερα το $\bar{A}$ είναι συνεκτικό)

Απόδειξη
Έστω $f : B \to \{0,1\}$ συνεχής
(και θ.δ.ο η f δεν είναι επί)

Ο περιορισμός $f|_A$ της f στο A είναι συνεχής.
Άρα εφόσον το A είναι συνεκτικό
η $f|_A : A \to \{0,1\}$ δεν είναι επί
Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A \neq \emptyset$ (Αν $A = \emptyset$ το συμπέρασμα είναι προφανές)
Έστω $a \in A$
Εφόσον η f δεν είναι επί έχουμε $f(x) = f(a)$ $\forall x \in$
Για κάθε $x \in B$ έχουμε $x \in \bar{A}$ και υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A με $x_n \xrightarrow{\rho} x \xrightarrow{f \text{ συνεχής στο } x} f(x_n) \to f(x)$

Εφόσον $f(x_n)=f(a)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ αφού περιορίζουμε ότι $f(x_n)$
Άρα η f είναι σταθερή (άρα όχι επί)

Σημείωση: Το αντίστροφο δεν ισχύει π.χ. στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική το $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ είναι συνεκτικό ενώ το $\mathbb{Q}$ δεν είναι

Πρόταση: Συνεχής εικόνα συνεκτικού χώρου είναι συνεκτικός χώρος (αντίστοιχα για το συνεκτικό σύνολο)
Δηλαδή αν X συνεκτικός και $f: X \to Y$ συνεχής και επί τότε ο Y είναι συνεκτικός.
[Άλλη διατύπωση: Αν (X,ρ) μ.χ. $A \subseteq X$ με A συνεκτικό και $f: A \to (Y,d)$ συνεχής τότε το $f(A)$ είναι συνεκτικό]

Απόδειξη

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι ο Y δεν είναι συνεκτικός
Τότε υπάρχει $g: Y \to \{0,1\}$ συνεχής και επί
Τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής (ως σύνθεση συνεχών) και επί (ως σύνθεση επί).
Άτοπο άρα ο Y είναι συνεκτικός

(Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής)

Πόρισμα: Αν X συνεκτικός χώρος και $f: X \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τότε το $f(X)$ είναι διάστημα

Απόδειξη [δηλ. αν $x, y \in X$ και $t \in \mathbb{R}$ με $f(x) < t < f(y)$ τότε υπάρχει $z \in X$ ώστε $f(z) = t$]
Από την προηγούμενη πρόταση το $f(X)$ είναι συνεκτικό άρα είναι διάστημα.

Άσκηση Έστω (X, ρ) μ.χ. και A ένα ανεκτικό υποσύνολο του X που περιέχει δύο τουλάχιστον στοιχεία. Τότε το A είναι υπεραριθμήσιμο.

Απόδ

Έστω $a, b \in A$ με $a \neq b$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \rho(x, a)$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής

και εφόσον το A είναι ανεκτικό το $f(A)$ θα είναι ανεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$

Άρα το $f(A)$ είναι διάστημα.

Εφόσον $f(a) = \rho(a, a) = 0$

$f(b) = \rho(b, a) > 0$.

Θέτοντας $\lambda = \rho(b, a)$

έχουμε $[0, \lambda] \subseteq f(A)$

Εφόσον το $[0, \lambda]$ είναι υπεραριθμήσιμο το $f(A)$ είναι επίσης υπεραριθμήσιμο άρα το A είναι υπεραριθμήσιμο.

Πρόταση Αν X, Y μ. χώροι (και θεωρούμε το $X \times Y$ με οποιοδήποτε μετρική γινόμενο.

Τότε ο $X \times Y$ είναι ανεκτικός ανν οι X, Y είναι ανεκτικοί

Απόδειξη

Οι $\pi_1 : X \times Y \to X$ $\pi_1(x, y) = x$ είναι συνεχείς

$\pi_2 : X \times Y \to Y$ $\pi_2(x, y) = y$

Αν ο $X \times Y$ είναι ανεκτικός τότε οι X, Y είναι ανεκτικοί

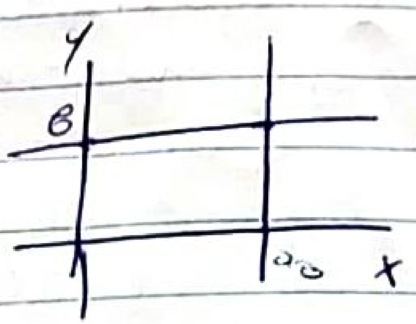
ως συνεχείς εικόνες ανεκτικών μ.χ

Αντίστοιχα, υποθέτουμε ότι οι X και Y είναι συνεκτικά
Τότε για κάθε $a \in X$
το $\{a\} \times Y$ είναι συνεκτικό
και για κάθε $b \in Y$ το $X \times \{b\}$ είναι συνεκτικό

Εφόσον $(\{a\} \times Y) \cap (X \times \{b\}) \neq \emptyset$ (η τομή περιέχει το (a,b))

Το $(X \times \{b\}) \cup (\{a\} \times Y)$ είναι συνεκτικό

Θεωρούμε τυχαίο $a_0 \in X$.
Η οικογένεια συνόλων $(\{a_0\} \times Y) \cup (X \times \{b\})$
αποτελείται από συνεκτικά σύνολα
και η τομή τους είναι μη κενή
(καθένα περιέχει το $\{a_0\} \times Y$)



Άρα η ένωση τους είναι συνεκτικό σύνολο δηλ. το $X \times Y$
είναι συνεκτικό.